中級ミクロ経済学 II（再履修）　第 4 回授業内課題

問題作成者：北村　友宏

2018 年 6 月 25 日

学籍番号：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

※解法が分からなければ，空白のまま提出しようとせず，担当教員に質問してください．

1. 生産要素を 2 種類用いて財を 1 種類生産する企業を考える．生産関数は

$$f(x_1, x_2) = \sqrt{3x_1 + 2x_2} + 3\sqrt{x_2}$$

である．また，要素 2 の価格は 4 である．この企業が財を 5 単位生産するときの生産要素の最適投入量は，要素 2 の投入量が 0 の端点解であるという．このとき，以下の問いに答えなさい．

（a）費用最小化問題を書きなさい．

（b）要素 1 と要素 2 の限界生産物 MP_1 と MP_2 を求めなさい．

（c）等量曲線の式（費用最小化問題の制約条件式）に $x_2 = 0$ を代入することにより，最適な要素 1 の投入量を求めなさい．

（d）技術的代替率の絶対値 $|TRS|$ と要素価格比の関係を，等号を含む（弱い意味の）不等式で表しなさい．そして，その不等式に，（b）で求めた要素 1 と要素 2 の限界生産物，問題に与えられている要素 2 の価格（$w_2 = 4$）と最適な要素 2 の投入量（$x_2 = 0$），（c）で求めた最適な要素 1 の投入量をそれぞれ代入して不等式を要素 1 の価格 w_1 について解くことにより，$x_2 = 0$ の端点解となる w_1 の範囲を求めなさい．

（e）要素 1 の価格が 2 のとき，財を 5 単位生産する場合の費用の最小値を求めなさい．

授業内課題解答

解答作成者：北村　友宏

※答案には重要な計算過程を示していればよい．ここまで詳しく説明する必要はない．

1.（a）費用最小化問題は，

$$\min_{x_1,x_2} w_1 x_1 + 4x_2,$$
$$\text{s.t.} \ \underbrace{\sqrt{3x_1 + 2x_2} + 3\sqrt{x_2}}_{=f(x_1,x_2)} = 5.$$

（b）$t = t(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2$ とすると，

$$f(x_1, x_2) = \sqrt{t(x_1, x_2)} + 3\sqrt{x_2}.$$

よって，要素 1 の限界生産物は，

$$MP_1 = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \frac{df(x_1, x_2)}{dt}\frac{\partial t(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} \cdot 3 = \frac{3}{2}(3x_1 + 2x_2)^{-\frac{1}{2}}.$$

要素 2 の限界生産物は，

$$MP_2 = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\partial t(x_1, x_2)}{\partial x_2} + 3 \cdot \frac{1}{2}x_2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(3x_1 + 2x_2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 + \frac{3}{2}x_2^{-\frac{1}{2}} = (3x_1 + 2x_2)^{-\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}x_2^{-\frac{1}{2}}.$$

（c）等量曲線の式に $x_2 = 0$ を代入

$$\begin{aligned}\sqrt{3x_1 + 2 \cdot 0} + 3\sqrt{0} = 5 &\Leftrightarrow \sqrt{3x_1} = 5 \\ &\Leftrightarrow 3x_1 = 25 \qquad \text{両辺 2 乗} \\ &\Leftrightarrow x_1 = \frac{25}{3} \qquad \text{両辺} \div 3\end{aligned}$$

よって，最適な要素 1 の投入量は $\dfrac{25}{3}$.

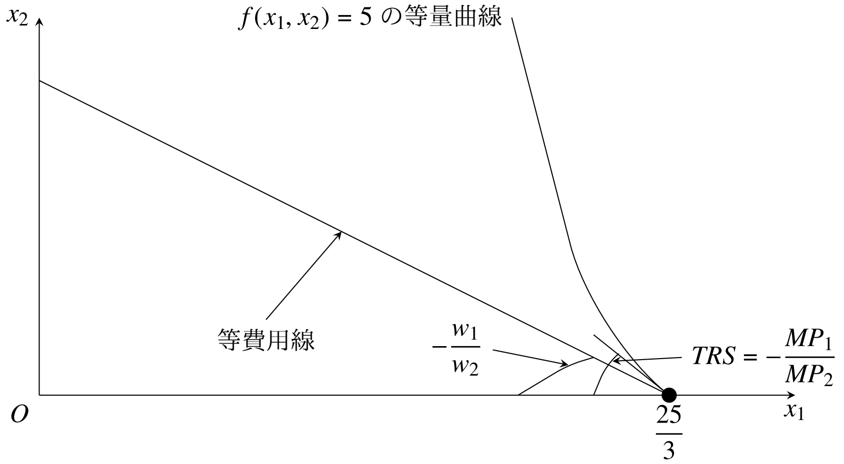
（d）$x_2 = 0$ の端点解となる条件は，

$$
\begin{aligned}
|TRS| \geqslant \frac{w_1}{w_2} &\Leftrightarrow \left| \underbrace{-\frac{MP_1}{MP_2}}_{\text{技術的代替率 } TRS} \right| \geqslant \underbrace{\frac{w_1}{w_2}}_{\text{要素価格比}} \\
&\Leftrightarrow \left| -\frac{\frac{3}{2}(3x_1 + 2x_2)^{-\frac{1}{2}}}{(3x_1 + 2x_2)^{-\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}x_2^{-\frac{1}{2}}} \right| \geqslant \frac{w_1}{4} \\
&\Leftrightarrow \frac{\frac{3}{2}\left(3 \cdot \frac{25}{3} + 2 \cdot 0\right)^{-\frac{1}{2}}}{\left(3 \cdot \frac{25}{3} + 2 \cdot 0\right)^{-\frac{1}{2}} + \frac{3}{2} \cdot 0^{-\frac{1}{2}}} \geqslant \frac{w_1}{4} && \text{絶対値を外し，} x_1 = \frac{25}{3}, x_2 = 0 \text{ を代入} \\
&\Leftrightarrow \frac{\frac{3}{2} \cdot 25^{-\frac{1}{2}}}{25^{-\frac{1}{2}}} \geqslant \frac{w_1}{4} \\
&\Leftrightarrow \frac{3}{2} \geqslant \frac{w_1}{4} && \text{左辺の分母と分子 } \times 25^{\frac{1}{2}} \\
&\Leftrightarrow 4 \cdot \frac{3}{2} \geqslant 4 \cdot \frac{w_1}{4} \\
&\Leftrightarrow 2 \cdot 3 \geqslant w_1 \\
&\Leftrightarrow w_1 \leqslant 6.
\end{aligned}
$$

よって，w_1 の範囲は，

$$w_1 \leqslant 6.$$

- $w_1 > 0$ なので，$0 < w_1 \leqslant 6$ としてもよい．
- 図で表すと，以下のようになる．



（e）要素 1 と要素 2 の価格と最適投入量を費用の定義に代入すると，

$$2 \cdot \frac{25}{3} + 4 \cdot 0 = \frac{50}{3}.$$

よって，費用の最小値は $\frac{50}{3}$.